[21-BA428-A/21-BS432-A]

AT THE END OF FOURTH SEMESTER - (CBCS PATTERN)

DEGREE EXAMINATIONS

MATHEMATICS - IV(A) - REAL ANALYSIS

(UG PROGRAM (4 YEARS HONORS))

(COMMON FOR B.A., B.Sc)

(w.e.f. Admitted Batch 2020-21)

Time : 3 Hours　　　　Maximum : 75 Marks

SECTION - A

విభాగం - ఎ

Answer any Five questions. Each question carries Five marks. **(5×5=25)**

ఏవైనా **ఐదు** ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు **ఐదు** మార్కులు.

1. Prove that every convergent sequence is bounded.

ప్రతి అభిసరణ అనుక్రమము పరిబద్ధం అవుతుందని నిరూపించుము.

2. Test for convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}$ యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించండి.

3. Prove that $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....$ converges.

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....$ అభిసరిస్తుందని నిరూపించుము.

4. By $\in,\delta$ technique, prove that the function f defined by $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$ and $f(x)=0, x=0$ is continuous at $x=0$.

$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$ మరియు $f(x) = 0, x = 0$ చే నిర్వచించిన, $\in,\delta$ టెక్నిక్ ద్వారా ప్రమేయం f, $x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అవుతుందని నిరూపించుము.

5. If $f:[a,b]\to R$ is derivable at $c\in[a,b]$, then prove that f is continuous at c.

$f:[a,b]\to R$ ప్రమేయం $c\in[a,b]$ వద్ద అవకలనీయము అయిన, f ప్రమేయం c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపుము.

6. Discuss the applicability of lagrange's mean value theorem for $f(x) = x(x-1)(x-2)$ on $\left[1, \frac{1}{2}\right]$.

$f(x) = x(x-1)(x-2)$ అనే ప్రమేయానికి $\left[1, \frac{1}{2}\right]$ పై, లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతం యొక్క అనువర్తనీయతను చర్చించండి.

7. Prove that, if $f:[a,b] \to R$ is continuous on [a,b], then f is R - integrable on [a,b].

$f:[a,b] \to R$ ప్రమేయం [a,b] పై అవిచ్ఛిన్నమైన, [a,b] పై R - సమాకలనీయమని నిరూపించుము.

8. If $f:[a,b] \to R$ is bounded function, then prove that $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

$f:[a,b] \to R$ ప్రమేయం పరిబద్ధం అయిన, $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$ అని చూపండి.

SECTION - B

విభాగం - బి

Answer ALL the questions. Each question carries Ten marks. (5×10=50)

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయండి. ప్రతి ప్రశ్నకు పది మార్కులు.

9. a) State and prove sandwich theorem.

సాండ్‌విచ్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

(OR/లేదా)

b) Prove that the sequence $\{S_n\}$ defined by

$S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ is convergent.

$S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ అయినప్పుడు, అనుక్రమము $\{S_n\}$ అభిసరించునని నిరూపించుము.

10. a) Test for the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,3,5.....(2n-1)}{2,4,6.....(2n)} x^{n-1} (x > 0)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,3,5.....(2n-1)}{2,4,6.....(2n)} x^{n-1} (x > 0)$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

(OR/లేదా)

b) State and prove Cauchy's n^{th} root test.

కాషీ n^{th} మూల పరీక్షను ప్రవచించి, నిరూపించుము.

a) Obtain the points of discontinuity of the function f defined by f(0) = 0, $f(x)=\frac{1}{2}-x$, $0<x<\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, f(x)=\left(\frac{3}{2}-x\right)$, $\frac{1}{2}<x<1$ and f(1) = 1. Examine the types of discontinuities.

$f(0) = 0$, $f(x)=\frac{1}{2}-x$, $0<x<\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, f(x)=\left(\frac{3}{2}-x\right)$, $\frac{1}{2}<x<1$, మరియు $f(1)=1$ అని నిర్వచించిన, f యొక్క విచ్ఛిన్నతా బిందువులను కనుగొని, విచ్ఛిన్నతా రకాలను పరీక్షించండి.

(OR/లేదా)

b) If $f:[a,b]\to R$ is continuous on [a,b], then prove that f is bounded on [a,b].

f అనే ప్రమేయం [a,b] పై అవిచ్ఛిన్నమైతే, అది [a,b] పై పరిబద్ధం అవుతుందని నిరూపించండి.

12. a) State and prove Rolle's theorem.

రోలే సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించు

(OR/లేదా)

b) Prove that $f(x)=x\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right]$, if $x\neq 0$ and

continuous at $x=0$, but not derivable at

$f(x)=x\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right]$, $x\neq 0$ మరియు $f(0)=0$

$x=0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమవుతుందని, కాని అవ కాదని నిరూపించండి.

13. a) Prove that $\frac{\pi^3}{24}\leq\int_0^{\pi}\frac{x^2}{5+3\cos x}dx\leq\frac{\pi^3}{6}$.

$\frac{\pi^3}{24}\leq\int_0^{\pi}\frac{x^2}{5+3\cos x}dx\leq\frac{\pi^3}{6}$ అని చూపండి

(OR/లేదా)

State and prove fundamental theorem on integral calculus.

సమాకలన గణితం యొక్క మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.